

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2025-26 г.г.

Заключительный этап

11 класс

Время написания работы 4 астрономических часа Решения всех задач оцениваются из 7 баллов

11.1. Действительные числа x, y, z удовлетворяют уравнениям $x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy = 2$. Найти все возможные значения выражения $xy + yz + zx$.

11.2. Пусть $a_n, n = 1, 2, \dots$ - бесконечная последовательность положительных действительных чисел таких, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1}^2 + a_{n+1} = a_n, n = 1, 2, \dots$. Докажите, что $a_n \geq \frac{1}{n}$ для всех натуральных n .

11.3. Докажите, что любой неравносторонний треугольник можно разбить на три треугольника, радиусы описанных окружностей которых равны.

11.4. Множество X состоит из десяти различных натуральных чисел таких, что для произвольного $k = 2, \dots, 10$ сумма любых k из этих чисел делится на k . Найти минимальное значение, которое может принимать максимальное из этих чисел.

11.5. В таблице размера 8 на 8 клеток отмечены некоторые 8 клеток так, что в каждой строке и каждом столбце отмечена ровно одна клетка. Кроме того, в некоторых 8 клетках таблицы расставлены 8 фишек так, что в каждой строке и каждом столбце стоит ровно одна фишка. За один ход можно переставить одну из фишек в любую соседнюю с ней по стороне пустую клетку. Найти минимальное N такое, что при любых допустимых расстановке 8 фишек и отметке 8 клеток в таблице все фишки можно переставить на отмеченные клетки не более, чем за N ходов. Некоторые фишки могут изначально стоять в отмеченных клетках.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2025-26 г.г.

Заключительный этап

11 класс

Время написания работы 4 астрономических часа Решения всех задач оцениваются из 7 баллов

11.1. Действительные числа x, y, z удовлетворяют уравнениям $x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy = 2$. Найти все возможные значения выражения $xy + yz + zx$.

11.2. Пусть $a_n, n = 1, 2, \dots$ - бесконечная последовательность положительных действительных чисел таких, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1}^2 + a_{n+1} = a_n, n = 1, 2, \dots$. Докажите, что $a_n \geq \frac{1}{n}$ для всех натуральных n .

11.3. Докажите, что любой неравносторонний треугольник можно разбить на три треугольника, радиусы описанных окружностей которых равны.

11.4. Множество X состоит из десяти различных натуральных чисел таких, что для произвольного $k = 2, \dots, 10$ сумма любых k из этих чисел делится на k . Найти минимальное значение, которое может принимать максимальное из этих чисел.

11.5. В таблице размера 8 на 8 клеток отмечены некоторые 8 клеток так, что в каждой строке и каждом столбце отмечена ровно одна клетка. Кроме того, в некоторых 8 клетках таблицы расставлены 8 фишек так, что в каждой строке и каждом столбце стоит ровно одна фишка. За один ход можно переставить одну из фишек в любую соседнюю с ней по стороне пустую клетку. Найти минимальное N такое, что при любых допустимых расстановке 8 фишек и отметке 8 клеток в таблице все фишки можно переставить на отмеченные клетки не более, чем за N ходов. Некоторые фишки могут изначально стоять в отмеченных клетках.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2025-26 г.г.

Заключительный этап

11 класс

Время написания работы 4 астрономических часа Решения всех задач оцениваются из 7 баллов

11.1. Действительные числа x, y, z удовлетворяют уравнениям $x^2 + yz = y^2 + zx = z^2 + xy = 2$. Найти все возможные значения выражения $xy + yz + zx$.

11.2. Пусть $a_n, n = 1, 2, \dots$ - бесконечная последовательность положительных действительных чисел таких, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1}^2 + a_{n+1} = a_n, n = 1, 2, \dots$. Докажите, что $a_n \geq \frac{1}{n}$ для всех натуральных n .

11.3. Докажите, что любой неравносторонний треугольник можно разбить на три треугольника, радиусы описанных окружностей которых равны.

11.4. Множество X состоит из десяти различных натуральных чисел таких, что для произвольного $k = 2, \dots, 10$ сумма любых k из этих чисел делится на k . Найти минимальное значение, которое может принимать максимальное из этих чисел.

11.5. В таблице размера 8 на 8 клеток отмечены некоторые 8 клеток так, что в каждой строке и каждом столбце отмечена ровно одна клетка. Кроме того, в некоторых 8 клетках таблицы расставлены 8 фишек так, что в каждой строке и каждом столбце стоит ровно одна фишка. За один ход можно переставить одну из фишек в любую соседнюю с ней по стороне пустую клетку. Найти минимальное N такое, что при любых допустимых расстановке 8 фишек и отметке 8 клеток в таблице все фишки можно переставить на отмеченные клетки не более, чем за N ходов. Некоторые фишки могут изначально стоять в отмеченных клетках.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2025-26 г.г.

Заключительный этап

11 класс

Время написания работы 4 астрономических часа Решения всех задач оцениваются из 7 баллов

11.1. Действительные числа x, y, z удовлетворяют уравнениям $x^2 + yz = y^2 + zx = z^2 + xy = 2$. Найти все возможные значения выражения $xy + yz + zx$.

11.2. Пусть $a_n, n = 1, 2, \dots$ - бесконечная последовательность положительных действительных чисел таких, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1}^2 + a_{n+1} = a_n, n = 1, 2, \dots$. Докажите, что $a_n \geq \frac{1}{n}$ для всех натуральных n .

11.3. Докажите, что любой неравносторонний треугольник можно разбить на три треугольника, радиусы описанных окружностей которых равны.

11.4. Множество X состоит из десяти различных натуральных чисел таких, что для произвольного $k = 2, \dots, 10$ сумма любых k из этих чисел делится на k . Найти минимальное значение, которое может принимать максимальное из этих чисел.

11.5. В таблице размера 8 на 8 клеток отмечены некоторые 8 клеток так, что в каждой строке и каждом столбце отмечена ровно одна клетка. Кроме того, в некоторых 8 клетках таблицы расставлены 8 фишек так, что в каждой строке и каждом столбце стоит ровно одна фишка. За один ход можно переставить одну из фишек в любую соседнюю с ней по стороне пустую клетку. Найти минимальное N такое, что при любых допустимых расстановке 8 фишек и отметке 8 клеток в таблице все фишки можно переставить на отмеченные клетки не более, чем за N ходов. Некоторые фишки могут изначально стоять в отмеченных клетках.